

基于成本效益分析的生产优化模型*

肖雨慧¹ 黄国锐¹ 孔盈盈² 韦铸娥^{1**}

1. 南宁学院信息工程学院, 南宁 530200

2. 南宁学院商学院, 南宁 530200

摘要 为帮助企业优化电子产品的生产与销售流程, 本文从零部件采购与成品检测入手, 提出了多种成本优化方法。研究综合运用了贝叶斯抽样、二项分布模型和统计假设检验等手段, 制定了基于次品率和抽样策略的检测与决策方法。在此基础上, 构建了包含检测成本、生产损失、替换费用及拆解成本等因素的总成本函数, 优化了生产流程中的检测与处理方案。模型进一步考虑了抽样检测结果可能带来的误差, 通过对检测费用、次品损失、替换与拆解成本的深入分析, 提出了具有高效成本控制能力的生产策略, 确保在不确定条件下的决策质量。

关键字 成本优化, 贝叶斯抽样, 统计分析, 生产策略

Production Optimization Model Based on Cost-Benefit Analysis

Xiao Yuhui¹ Huang Guorui¹ Kong Yingying² Wei Zhue^{1**}

1. College of Information Engineering, Nanning University, Nanning, 530200

2. College of Business, Nanning University, Nanning, 530200

361762849@qq.com

Abstract—In order to help enterprises optimize the production and sales process of electronic products, this paper proposes a variety of cost optimization methods starting from parts procurement and finished product testing. The study uses Bayesian sampling, binomial distribution model and statistical hypothesis testing to develop a detection and decision-making method based on defective rate and sampling strategy. On this basis, a total cost function including factors such as detection cost, production loss, replacement cost and disassembly cost is constructed to optimize the detection and treatment scheme in the production process. The model further considers the possible errors caused by sampling test results. Through in-depth analysis of detection costs, defective losses, replacement and disassembly costs, a production strategy with efficient cost control capabilities is proposed to ensure the quality of decision-making under uncertain conditions.

Keywords—Cost optimization, Bayesian sampling, statistical analysis, production strategy

1 引言

近年来, 随着全球制造业的迅猛发展, 关键零部件的质量控制与生产流程优化已成为企业提升竞争力的核心议题。在实际生产中, 企业面临多重挑战: 一是准确判断零部件次品率并制定检测策略; 二是处理即使零部件合格但成品仍可能不达标的问题, 需权衡成本与质量; 三是多道工序和零配件下, 如何优化生产流程以实现高效质控和成本节约。

国内外学者在优化问题领域已开展了一系列研究, 并取得了很大的进展。例如, 李佳荣等^[1]通过建立多目

标规划模型解决原材料采购的费用最省以及运输中的转运损耗率最小等优化问题, 为优化决策提供了重要理论依据; 刘尚一和吴涛^[2]构建混合变量 0-1 线性规划模型, 该模型简单便捷, 为解决组合优化问题提供了有效工具; 石晓梅等^[4]研究了零售商最优订购策略, 使期仅合约采购的数量有显著提高。与此同时, W. J. Hop 和 M. L. Spearman^[5]综合考虑生产过程中的随机性和波动性对整体效率的影响, 并制定相应的策略, 这为在多阶段生产优化模型的分析中提供了重要的理论依据。L. Li 和 H. Zhang^[6]研究基于动态规划的多阶段生产优化方法, 实证分析表明不确定性对生产效率的影响, 并解决了在复杂环境下实现资源的最优配置问题。这些研究为解决次品率和检测成本之间的优化决策问题提供了重要的方法论支持。尽管现有研究在优化问题上有所进展, 但构建综合考虑次品率、检测

*基金资助: 南宁学院横向科研项目(2024HX146, 2024HX172)。

**通讯作者: 韦铸娥 361762849@qq.com

策略和不合格成品处理的多阶段优化模型仍是挑战。企业需系统化方法平衡质量与成本。

对于零件的合理分配，本文根据已有数据，分析求解以下问题：

问题 1：在标称次品率为 10%的情况下，企业需判断在 90%与 95%置信度下实际次品率是否超出标称值，以决定是否收购零配件。

问题 2：企业在零配件和成品生产的各个阶段需进行决策，以制定合理方案实现利益最大化。具体阶段如下：

① 对于零配件，企业决定是否检测其次品率。若检测，则抛弃不合格零件；反之，则进入下一阶段。

② 对于装配后的成品，企业决定是否进行检测。若检测，则仅合格成品进入市场；反之，则全部直接进入市场。

③ 对于不合格成品，企业决定是否进行拆解。若拆解，则回到阶段一重新决策；反之，则直接丢弃。

④ 对于用户购买到的不合格产品，企业提供无条件调换服务，但会承担一定的调换损失。调换回来的产品将回到阶段三进行重新决策。

问题 3：在多道工序、多零配件的情况下，企业需调整方案以适应复杂生产流程，确保决策的科学性和合理性。

问题 4：在次品率未知的情况下，企业将采取科学方法设定全新方案，以确保生产流程的质量控制和成本效益。

本研究旨在构建基于成本效益分析的生产优化模型，提供决策依据。将运用贝叶斯抽样、二项分布模型等方法制定检测与决策方法，优化流程，提高效率和质量。同时，构建总成本函数，提出成本控制策略，确保企业最佳决策。

2 问题的建立与求解

2.1 问题 1 的模型以及求解

针对问题 1，当样本量固定时，最低抽样多少次可以满足条件；当抽样次数固定时，样本量需要多少才能满足要求。因此，本文采用两种方法进行分析：

(1) 方法 1

方法 1 的求解过程如下：固定样本量为 100，采用贝叶斯抽样检测对未知数据进行估算。首先将次品率 P 定义为先验分布 $P(p)$ ，服从 Beta 分布 $p \sim \text{Beta}(\alpha, B)$ ，当 α 缺乏先验知识时选择均匀分布，即 $\alpha = \beta = 1$ ；其次定义次品数量 X 服从参数为 n 和 p 的二项分布

$X \sim B(n, p)$ ；最后根据贝叶斯定理，其后验分布服从 $P(p|X) = \frac{P(X|p)P(p)}{P(X)}$ 。对于问题一要选择后验概率 $P(p|X)$ 分别大于 90%与 95%信度的方案，采用 Python 程序运行的结果如图 1 所示。

```
当前抽样次数: 1, 次品数量: 0, 后验概率: 0.81
当前抽样次数: 2, 次品数量: 0, 后验概率: 0.7290000000000001
当前抽样次数: 3, 次品数量: 0, 后验概率: 0.6561
当前抽样次数: 4, 次品数量: 0, 后验概率: 0.59049
当前抽样次数: 5, 次品数量: 0, 后验概率: 0.531441
当前抽样次数: 6, 次品数量: 1, 后验概率: 0.8503056
当前抽样次数: 7, 次品数量: 1, 后验概率: 0.8131047299999999
当前抽样次数: 8, 次品数量: 0, 后验概率: 0.3874204889999999
当前抽样次数: 9, 次品数量: 0, 后验概率: 0.34867844009999993
当前抽样次数: 10, 次品数量: 0, 后验概率: 0.31381059608999995
当前抽样次数: 11, 次品数量: 2, 后验概率: 0.8891300222549999
当前抽样次数: 12, 次品数量: 4, 后验概率: 0.9935398440405
95%信度下的最小抽样次数: 12
当前抽样次数: 1, 次品数量: 0, 后验概率: 0.81
当前抽样次数: 2, 次品数量: 1, 后验概率: 0.972
90%信度下的最小抽样次数: 2
```

图 1 最少检测次数抽样计算结果图

从图 1 可以看出，不同的抽样次数会产生不同的后验概率。随着抽样次数的增加，当后验概率分别超过 90%和 95%时，即可确定对应的最小抽样次数。然而，后验概率具有随机性，会在每次抽样后基于新的数据重新计算，所以后续抽样的后验概率不会受到之前抽样结果的影响。

(2) 方法 2

方法 2：固定抽样次数为 100，采用二项分布进行抽样检测分析。首先，设定原假设与备择假设，并根据样本量计算公式： $n = \frac{Z^2 p_0(1-p_0)}{B^2}$ 其中， Z 表示置信区间对应的标准分值。

当置信度为 95%时， $Z=1.96$ ；当置信度为 90%时， $Z=1.64$ 。将对应的值代入公式，得到在 95%的置信度下，样本量为 $n_{95}=178.711$ ；在 90%的置信度下，计算样本量为 $n_{90}=242.062$ 。

基于以上检测方案，当置信度为 95%，若样本量 $n > 100$ ，则拒收这批零件；当置信度为 90%，若样本量 $n \leq 62$ ，则接受这批零件。

综上所述，在两种方法中，二项分布抽样在较高的置信水平下需要更大的样本量来确保决策的可靠性。相比之下，贝叶斯抽样更适用于样本数量受限或检测成本较高的场景，能够有效利用先验信息和小规模样本做出更为精准的判断。

2.2 问题 2 的模型汇总与求解

针对问题二，本文采用了两种分析方法。首先是构建 0-1 变量优化模型，用于帮助企业合理安排生产资源与分配检测任务；其次是枚举法，对各阶段方案

进行逐一分析，帮助企业更清晰地了解每种方案的成本构成，从而做出更优选择。以下结合图 2（零件生

产各阶段示意图）对问题展开分析。

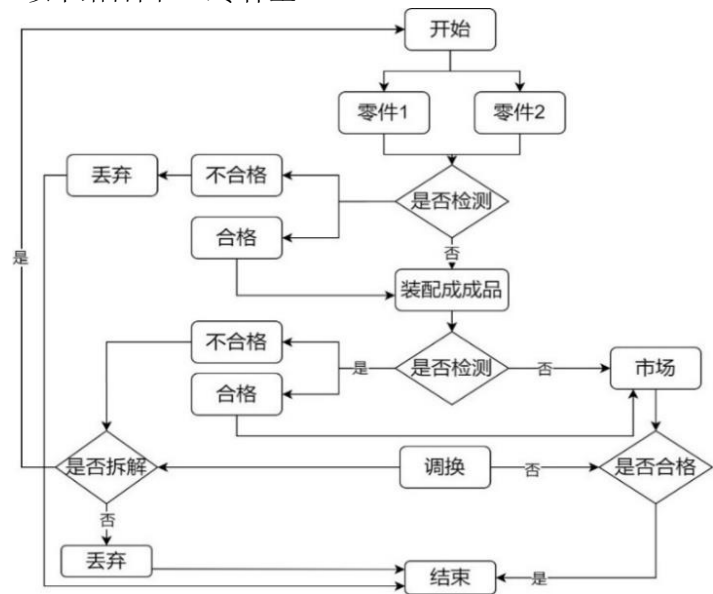


图 2 零件生产各阶段示意图

由图 2 可知整个流程可分为四个阶段：第一阶段是各阶段检测环节的总成本；第二阶段是评估未检测零件可能产生的次品损失；第三阶段是分析不合格零件流入市场后可能导致的调换费用；第四阶段是计算企业因不拆解不合格零件而产生的额外费用。

在整个流程中，各阶段的成本依据 0-1 变量法建模，其中检测环节用“1”表示，不检测用“0”表示，所以总可能的组合数为 $2^4=16$ (种),从而明确不同选择下的成本差异。

检测各个环节的总成本为 $N(D_{p1}T_{p1} + D_{p2} + T_{p2} + D_{fp}T_{fp})$ ，不检测零件时可能产生的次品损失为 $N[(1-D_{p1})R_{p1}A + (1-D_{p2})R_{p2}A]$ ，企业不检测成品时可能有不合格成品进入市场，当不合格成品被消费者购买后，企业需要承担调换损失的成本为 $N[(1-D_{fp})R_{fp}L]$ 。企业决定拆解不合格成品时，产生拆解费用（拆解费用取决于不合格成品的数量）为 $N[D_{ud}R_{fp}D]$ 。总成本 TC 的计算公式为：

$$TC=N(D_{p1}T_{p1} + D_{p2} + T_{p2} + D_{fp}T_{fp}) + N[(1-D_{p1})R_{p1}A + (1-D_{p2})R_{p2}A] + N[(1-D_{fp})R_{fp}L] + N[D_{ud}R_{fp}D]。$$

方法 1：基于 0-1 变量法采用 Python 模型构建最小化函数 TC_{min} 作为优化模型进行求解，得到的结果

如表 1 及表 2。

表 1 6 种情况生产决策汇总表

情况	检测零件 1	检测零件 2	检测成品	拆解不合格成品	总成本
1	F	F	F	F	180
2	F	F	F	F	360
3	F	F	T	F	420
4	T	T	T	F	400
5	F	T	F	F	260
6	F	F	F	F	110

在表 1 六种不同的结果中，情况 6 下的总成本 110 最低，即在生产流程不考虑所有检测和拆解步骤，虽然能达到成本最少目标，但这种决策也会产生次品流入市场的风险，导致企业声誉受损、客户满意度低的不良后果。

情况 1 和 2 在生产流程同样未进行检测，成本差异来自于他们的生产规模或固定成本。情况 3 增加成品检测，使成本升至 420，这是因为成品检测的成本较高。情况 4 考虑全面检测，其成本为 400，该全面检测策略可提高各环节的产品合格率，但所带来经济负担较大。情况 5 仅考虑零件 2 检测，其成本为 260，表明做针对性的检测，可适当降低成本负担。总的来说，不同策略的成本和风险各异，企业需根据实际情况做合理决策。

表 2 16 种决策在 6 种情况下的总成本汇总表

	情况 1	情况 2	情况 3	情况 4	情况 5	情况 6
决策 1	850.0	900.0	850.0	500.0	1150.0	1000.0
决策 2	800.0	800.0	800.0	400.0	1100.0	800.0
决策 3	610.0	720.0	850.0	900.0	1050.0	750.0
决策 4	560.0	620.0	800.0	800.0	1000.0	550.0
决策 5	610.0	720.0	610.0	520.0	1170.0	730.0
决策 6	560.0	620.0	560.0	420.0	1120.0	530.0
决策 7	370.0	540.0	610.0	920.0	1070.0	480.0
决策 8	320.0	440.0	560.0	820.0	1020.0	280.0
决策 9	710.0	820.0	710.0	520.0	410.0	830.0
决策 10	660.0	720.0	660.0	420.0	360.0	630.0
决策 11	470.0	640.0	710.0	920.0	310.0	580.0
决策 12	420.0	540.0	660.0	820.0	260.0	380.0
决策 13	470.0	640.0	470.0	540.0	430.0	560.0
决策 14	420.0	540.0	420.0	440.0	380.0	360.0
决策 15	230.0	460.0	470.0	940.0	330.0	310.0
决策 16	180.0	360.0	420.0	840.0	280.0	110.0

表 2 展示了 16 种决策在 6 种情况下的总成本数据。从整体看，不同决策的成本波动范围较大，反映出检测与处理策略组合对成本影响显著。如情况 6 下，决策 16 成本最低，说明该策略组合成本控制最优。对比不同情况，同一决策成本变化趋势各异，表明生产条件变化时需灵活调整策略，以实现成本效益最大化。

方法 2：采用枚举法进行分析，流程与方法 1 类似，但需要对每一个可能的方案进行逐一分析，并对比不同方案的结果。该分析通过 MATLAB 实现，得到如下表 3。

从表 3 中可以看出，各个阶段在不同价格变化下呈现出不同的趋势。

综合上两种方法可得到，优化模型和枚举法这两种策略中，枚举法提供了所有可能的方案，而优化模型则直接给出了最佳方案。因此，当数据量较大时，使用优化模型更适合，而在数据量较小的情况下，选择使用枚举法更高效。

2.3 问题 3 的模型汇总与求解

在问题二的基础上，当情况扩展为涉及多个零配件和多个工序时，构建成本最小的优化模型来进行求解。静态假设下对 8 个零配件、3 个半成品阶段及 1 个成品阶段的二元检测决策。因此，针对的阶段需要增加检测半成品的总成本，具体的阶段分析如下。

表 3 6 种情况生产决策汇总表

情况	检测			拆解不合格成品	总成本
	零件 1	零件 2	成品		
1	F	F	F	F	2903
2	F	F	F	F	2977
3	F	F	F	F	3097
4	T	T	F	F	3244
5	F	T	F	F	3008
6	F	F	F	F	2873

检测所有零件的总成本为 $N \sum_{i=1}^8 (D_{pi} T_{pi})$ ，不检测半成品时可能产生的次品损失为：

$$N \sum_{j=1}^3 [(1 - D_{sj}) R_{sj} A_{fp}]$$

不检测成品时的调换损失为：

$$N[(1 - D_{fp}) R_{fp} L]$$

拆解不合格成品的费用为：

$$N[D_{ud} R_{fp} D]。$$

检测半成品的总成本：

$$N \sum_{j=1}^3 (D_{sj} T_{sj})。$$

通过使用 Python 对上述决策模型进行分析, 计算得出共有 8192 种可能的检测情况, 部分结果如下。

表 4 部分生产决策方案示例

成本最小策略	8192	1216	7808	529	5393
检测零件 1	F	T	F	T	F
检测零件 2	F	T	F	T	T
检测零件 3	F	F	F	T	F
检测零件 4	F	T	F	F	T
检测零件 5	F	T	T	T	F
检测零件 6	F	F	T	T	T
检测零件 7	F	T	F	T	T
检测零件 8	F	F	F	T	T
检测半成品 1	F	F	F	F	F
检测半成品 2	F	F	F	T	T
检测半成品 3	F	F	F	T	T
检测成品	F	F	F	T	T
拆解不合格	F	F	F	T	T
总成本	124.7	126.2	126.4	150.6	149.6

从表 4 计算结果数据可以观察到, 不同的检测与拆解决策组合对总成本的影响显著。如果对零件 1 至 8 进行全面检测, 除了零件本身的检测费用外, 还需要支付半成品 1 至 3 和成品的检测费用, 从而显著提高整体成本。反之, 如果选择不进行检测, 成本主要来源于因成品退货所造成的损失。在问题三的分析中, 成品的销售价格为 200, 而调换损失仅为 40。因此, 从成本效益的角度来看, 不检测零件是最经济的选择。当所有零件、半成品和成品均不进行检测时, 总成本可降至最低。

2.4 问题 4 的模型汇总与求解

在未知次品率的情况下, 本文采用贝叶斯更新抽样检测模型对次品率进行动态估计, 并依次按照问题二和问题三的方法对抽样方案进行分析。对于次品率的计算, 利用贝叶斯更新公式对参数调整, 具体如下:

对于零件 i , 贝叶斯更新后的参数为:

$$G_{ppi} = G_{pi} + Z_{pi}, H_{ppi} = H_{pi} + (Y_{pi} - Z_{pi})$$

更新后的次品率为:

$$B_{pi} = \frac{G_{ppi}}{G_{ppi} + H_{ppi}}$$

对于半成品 i 。贝叶斯更新后的参数为:

$$G_{psi} = G_{si} + Z_{si}, H_{psi} = H_{si} + (Y_{si} - Z_{si})$$

计算更新后的次品率为:

$$B_{si} = \frac{G_{psi}}{G_{psi} + H_{psi}}$$

对于成品, 贝叶斯更新后的参数为:

$$G_{pfp} = G_{fp} + Z_{fp}, H_{pfp} = H_{fp} + (Y_{fp} - Z_{fp})。$$

更新后的次品率为:

$$B_{fp} = \frac{G_{pfp}}{G_{pfp} + H_{pfp}}。$$

利用贝叶斯更新后的次品率进行成本分析, 分为以下情况:

① 零件成本

零件成本对于检测零件 i : 成本为 $D_{pi} \times T_{pi}$, 次品损失为 0。

对于不检测零件 i : 成本为 0, 次品损失为 $(1-D_{pi}) \times B_{pi} \times A_s \times N_p$ 零件总成本为所有零件的上述成本之和。

② 半成品成本

对于检测半成品 i : 成本为 $D_{si} \times T_{si}$, 次品损失为 0。

对于不检测半成品 i : 成本为 0, 次品损失为

$$(1-D_{pi}) \times B_{pi} \times A_s \times N_p$$

半成品总成本为所有半成品的上述成本之和。

③ 成品成本

若检测成品, 成本为 $D_{fp} \times T_{fp}$, 不检测时的调换损失为 0。

若不检测成品: 成本为 0, 调换损失为

$$(1-D_{fp}) \times B_{fp} \times L \times N_{fp}$$

成品总成本为上述两种情况之一。

④ 拆解成本

若决定拆解不合格成品, 成本为

$$D_{ud} \times B_{fp} \times D \times N_{fp}$$

这里假设 D_{ud} 是不合格成品的拆解决策变量, $D_{ud} = 1$ 时拆解。

如果不拆解不合格成品：成本为 0。

⑤ 总成本

TC 为零件成本、半成品成本、成品成本和拆解成本之和。

(1) 对于问题 2 的优化

基于上述模型与成本计算方法，通过 Python 实现优化，本文将更新的次品率和成本计算公式代入，最终得到以下优化结果，如表 5。

表 5 问题二优化后的结果分析表

编号	次品率			是否检测			是否拆解	总成本
	零件 1	零件 2	成品	零件 1	零件 2	成品		
1	0.115	0.212	0.173	F	F	F	F	300
2	0.115	0.211	0.173	F	F	F	F	300
3	0.115	0.212	0.173	F	F	T	F	496
4	0.115	0.211	0.173	F	T	T	F	369
5	0.115	0.212	0.173	F	T	F	F	342
6	0.115	0.211	0.173	F	F	F	F	369

根据 Python 运行结果分析，当零件 1、零件 2 及成品的次品率发生变化时，不同情况下的最优解决方案随之调整，总体表现各异。情况 1 的总体成本有所上升，表明检测和次品损失的成本增加；情况 2 的总成本则降低，反映出优化方案在应对次品率变化方面更为有效。

表 6 问题三优化后的各阶段决策与指标表

决策阶段	决策内容	具体决策	次品率
零件检测	零件 1	F	11.54%
零件检测	零件 2	F	11.54%
零件检测	零件 3	F	11.54%
零件检测	零件 4	F	11.54%
零件检测	零件 5	F	11.54%
零件检测	零件 6	F	11.54%
零件检测	零件 7	F	11.54%
零件检测	零件 8	F	11.54%
半成品检测	半成品 1	F	7.69%
半成品检测	半成品 2	F	7.69%
半成品检测	半成品 3	F	7.69%
成品检测	成品	F	5.77%
拆解决策	拆解	T	总成本：96

对于情况 3，总成本同样上升，说明检测与处理策略未能完全抵消次品率变化带来的额外损失。而在情况 4 中，优化方案选择不对零件 1 进行检测，结果

总成本反而下降，说明减少检测成本更具经济性。情况 5 和情况 6 的成本均有所增加，其中情况 6 的增幅尤为显著，表明次品率变化对其影响更大。

(2) 对于问题 3 的优化

基于上述模型与成本计算方法，通过 Python 实现优化，本文将更新的次品率和成本计算公式代入，最终得到以下优化结果，如表 6。

根据表 5 给出的各个情况来看，我们发现大部分数据趋于平衡状态。当部件的次品率处于相同水平时，整体成本反而呈现下降趋势。此外，针对第三个方面，优化后的模型在拆解后的总成本明显低于未优化时的成本。因此，可以推断当部件的次品率较高而成品的次品率相对较低时，整体成本有望得到进一步降低。这表明，通过合理调整模型，可以在特定次品率分布条件下有效减少总成本。

3 结束语

本文深入探讨了工厂零部件采购与成品生产中的质量控制和决策优化问题。在已知条件下，通过贝叶斯抽样和二项分布模型确定抽样次数和样本量，为企业收购零部件提供依据。多阶段决策中，0-1 变量法和枚举法揭示了不同策略对成本的影响，企业可据此选择最优方案。多工序多零配件时，优化模型助力企业决策，发现特定条件下不检测零件可降成本。未知次品率时，贝叶斯更新模型动态估计次品率，帮助企业调整策略。本论文主要研究为企业生产提供理论和实践指导，但企业需结合实际灵活运用并持续优化。未来研究可拓展模型应用，考虑更多因素，以提供更全面支持。

参考文献

[1] 李佳荣,梅华平,罗丹言,等.基于数学规划模型的生产企业原材料的订购与运输[J].黑龙江科学,2024,15(16):77-81.

[2] 刘尚一,吴涛.基于混合变量的 0-1 线性规划模型及应用[J].科学技术创新,2023(01):92-95.

[3] 姜启源,谢金星,叶俊.数学模型(第 4 版)[M].北京:高等教育出版社, 2011

[4] 石晓梅,冯耕中,邢伟,等.基于 B2B 电子交易市场的零售商最优订购策略[J].管理科学学报,2011,14(04):12-23.

[5] W J Hopp , M L Spearman. Factory Physics (3rd ed.)[M]. Waveland Press. 2011

[6] L Li, H Zhang. A dynamic programming approach for multi-stage production optimization under uncertainty[J]. International Journal of Production Economics, 2022, 227: 107656